Transitivität und Homogenität projektiver Ebenen

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung des Grades eines Doktors

der Naturwissenschaften

der

Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät

der

Eberhard-Karls-Universität

zu Tübingen

vorgelegt von

Wilbur Jacob Jónsson

aus Winnipeg / Kanada

1962

Druck der Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg

7427

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juli 1962

Dekan: Professor Dr. K. G. GRELL

1. Berichterstatter: Professor Dr. G. PICKERT

2. Berichterstatter: Professor Dr. H. WIELANDT

Sonderdruck aus

„Mathematische Zeitschrift", Band 80, S. 269—292 (1963)

Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg

Jónsson, W. J.
Math. Zeitschr. 80, 269–292 (1963)

Transitivität und Homogenität projektiver Ebenen

Von
Wilbur Jacob Jónsson

§ 1. Einleitung

Eine wichtige Untergruppe der Kollineationsgruppe einer projektiven Ebene ist die von den zentralen Kollineationen erzeugte Untergruppe. Wenn die Gruppe der zentralen Kollineationen mit dem Zentrum C und Achse c transitiv ist auf den von C verschiedenen, nicht auf c liegenden Punkten einer Geraden durch C, heißt die Ebene nach Baer [3] (C, c)-transitiv. In derselben Arbeit wurde auch der Begriff der (C, c)-Homogenität eingeführt. Lenz [9] und Barlotti [4] haben die Menge aller Punkt-Gerade-Paare untersucht, für die die Ebene (C, c)-transitiv ist. Der Satz von Lenz und Barlotti ergibt eine gruppentheoretische Klasseneinteilung der projektiven Ebenen nach ihrer „Transitivität". Die Frage, ob es Beispiele aller Klassen gibt, ist geklärt (Ostrom [11], Pickert [14], Salzmann[1] [15], Spencer [17], Yaqub[2] [19]), außer im Falle der Klasse I–6.

Im §2 wird die Klasse I–6 untersucht und es werden einige hinreichende Bedingungen angegeben, unter denen die Klasse leer wird. Dadurch ergibt sich ein vereinfachter Beweis des Satzes von Spencer, daß die Klasse II–3 leer ist. In §3 werden Beispiele endlicher Ebenen verschiedener Klassen angegeben. In §4 wird der Begriff der (C, c)-Homogenität verallgemeinert zu dem der (C, c, μ)-Homogenität und für ihn eine Lenz-Barlotti-Klasseneinteilung angegeben. Bis jetzt scheint übrigens kein Beispiel einer Ebene bekannt zu sein, die (C, c)-homogen (im Sinne von Baer) für mindestens ein Paar (C, c) ist, und in der nicht der Satz von Pappos gilt.

Definition 1.1. *Eine projektive Ebene ist ein Tripel* $(\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, I)$, *wobei* $\mathfrak{P}$ *und* $\mathfrak{G}$ *elementfremde Mengen sind und* I *eine in* $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{G}$ *definierte Relation, die wir Inzidenz nennen, mit den Eigenschaften:*

1. *Aus* $x I y$ *folgt* $x \in \mathfrak{P}$, $y \in \mathfrak{G}$.

2. *Aus* $x_i I y_j$ $(i, j = 1, 2)$ *folgt* $x_1 = x_2$ *oder* $y_1 = y_2$.

3. *Zu* $x_i \in \mathfrak{P}$ $(i = 1, 2)$ $x_1 \neq x_2$ *gibt es ein* $y \in \mathfrak{G}$ *mit* $x_i I y$ $(i = 1, 2)$. *Dieses nach 2. eindeutig bestimmte* y *wird mit* $x_1 x_2$ *bezeichnet.*

4. *Zu* $y_i \in \mathfrak{G}$ $(i = 1, 2)$ *gibt es stets ein* $x \in \mathfrak{P}$ *mit* $x I y_i$ $(i = 1, 2)$. *Dieses nach 2. eindeutig bestimmte* x *wird mit* $y_1 \cap y_2$ *bezeichnet.*

5. *Es gibt vier verschiedene Punkte, von denen keine drei kollinear sind.*

[1] Mündliche Mitteilung.
[2] Früher Frl. Spencer.

Die Ebene kann nach Auszeichnung von vier Punkten O, E, U, V, von denen keine drei auf einer Geraden liegen, durch einen Ternärkörper dargestellt werden, d.h. eine Menge $\mathfrak{T}$ mit einer ternären Verknüpfung $\boldsymbol{T}$, welche gewissen Regeln genügt (s. z.B. PICKERT [12], S. 31ff.). Mit der Abkürzung $\omega = UV$ hat man

$$\mathfrak{P} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathfrak{T}\} \cup \{(m) \mid m \in \mathfrak{T}\} \cup V,$$

$$\mathfrak{G} = \{[m, b] \mid m, b \in \mathfrak{T}\} \cup \{[x] \mid x \in \mathfrak{T}\} \cup \omega.$$

Die Inzidenzen sind: $(m)\,\mathrm{I}\,[m, b]$; $(m)\,\mathrm{I}\,\omega$; $(x, y)\,\mathrm{I}\,[x]$; $V\,\mathrm{I}\,[x]$; $V\,\mathrm{I}\,\omega$; $(x, y)\,\mathrm{I}\,[m,b]$ genau dann, wenn $y = \boldsymbol{T}(m, x, b)$. Es gibt in $\mathfrak{T}$ zwei ausgezeichnete Elemente 0, 1; mit ihnen definieren wir Addition und Multiplikation durch:

$$a + b = \boldsymbol{T}(1, a, b)$$

$$a \cdot b = \boldsymbol{T}(a, b, 0).$$

0 ist neutrales Element der Addition; 1 neutrales Element der Multiplikation. $\boldsymbol{T}$ wird linear genannt, wenn $T(a, b, c) = ab + c$ für alle $a, b, c \in \mathfrak{T}$. Es gilt:

$$U = (0),\ O = (0, 0),\ W = (1),\ E = (1, 1).$$

DEFINITION 1.2. *Eine Loop ist eine Menge $\mathfrak{L}$ mit einer binären Verknüpfung $*$, die die folgenden beiden Eigenschaften hat:*

Aus $x, y \in \mathfrak{L}$ folgt $x * y \in \mathfrak{L}$.

Die Gleichung $x * y = z$ ist für das dritte Element eindeutig lösbar, wenn zwei gegeben sind.

Wird die Verknüpfung $*$ als Addition geschrieben, so bezeichnet man die Lösungen x und y von $x + y = z$ als $z - y$ bzw. $-x + z$; der letztgenannte Ausdruck braucht natürlich nicht $= (0 - x) + z$ zu sein.

Die Kerne sind folgendermaßen definiert:

N_l, der linke Kern, besteht aus denjenigen Elementen a, für die für alle $b, c \in \mathfrak{L}$ die Gleichung $a * (b * c) = (a * b) * c$ gilt.

N_m, der mittlere Kern, besteht aus denjenigen Elementen a, für die für alle $b, c \in \mathfrak{L}$ die Gleichung $b * (a * c) = (b * a) * c$ gilt.

N_r, der rechte Kern, besteht aus denjenigen Elementen a, für die für alle $b, c \in \mathfrak{L}$ die Gleichung $b * (c * a) = (b * c) * a$ gilt.

BRUCK [6] hat gezeigt, daß alle Kerne Untergruppen von $\mathfrak{L}$ sind.

DEFINITION 1.3. *Eine umkehrbare Abbildung σ der Menge $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{G}$ auf sich heißt eine Kollineation, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *aus $P \in \mathfrak{P}$ folgt $\sigma P \in \mathfrak{P}$,*
   aus $g \in \mathfrak{G}$ folgt $\sigma g \in \mathfrak{G}$;
2. *aus $P\,\mathrm{I}\,g$ folgt $\sigma P\,\mathrm{I}\,\sigma g$.*

DEFINITION 1.4. *Eine umkehrbare Abbildung σ der Menge $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{G}$ auf sich heißt eine Korrelation, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1. *aus* $P \in \mathfrak{P}$ *folgt* $\sigma P \in \mathfrak{G}$,
   aus $g \in \mathfrak{G}$ *folgt* $\sigma g \in \mathfrak{P}$;
2. *aus* $P \mathrm{I} g$ *folgt* $\sigma g \mathrm{I} \sigma P$.

Definition 1.5. *Eine Kollineation* σ *heißt eine* (C, c)*-Kollineation, wenn es* $C \in \mathfrak{P}$ *und* $c \in \mathfrak{G}$ *gibt mit* $\sigma g = g$ *für alle Geraden* g *durch* C *und* $\sigma P = P$ *für alle Punkte* P *auf* c. *Bekanntlich ist* σ *durch* C, c *und* σQ *für einen nicht auf* c *liegenden, von* C *verschiedenen Punkt* Q *eindeutig bestimmt. Die Menge aller* (C, c)*-Kollineationen ist eine Gruppe.*

Definition 1.6. *Die Ebene* $\mathfrak{E}$ *heißt* (C, c)*-transitiv, falls die Gruppe aller* (C, c)*-Kollineationen transitiv ist auf der Menge der nicht auf* c *liegenden, von* C *verschiedenen Punkte einer Geraden durch* C.

Definition 1.7. *Eine Korrelation* σ *heißt* (C, c)*-Korrelation, wenn* ${}_5C = c$, $\sigma c = C$ *und aus* $P \mathrm{I} c$, $C \mathrm{I} g$, *die Gleichungen* $\sigma^2 P = P$, $\sigma^2 g = g$ *folgen.*

Die Baersche Definition einer (C, c)-Dualität fordert dagegen stärker $C \mathrm{I} c$ und $\sigma C P = C P \cap c$. In §4 werden Beispiele von (C, c)-Korrelationen mit $C \mathrm{I} c$ angegeben.

Offenbar induzieren σ und σ^{-1} dieselbe umkehrbare Abbildung μ der Menge der Punkte von c auf die Menge der Geraden durch C. Man hat ferner $\mu(\mu(P) \cap c) = C P$ für alle P auf c. Eine (C, c)-Korrelation, welche in diesem Sinn die Abbildung μ erzeugt, wird (C, c, μ)-Korrelation genannt.

Definition 1.8. *Sei* μ *eine umkehrbare Abbildung der Menge der Punkte von* c *auf die Menge der Geraden durch* C *mit* $\mu(\mu(P) \cap c) = C P$ *für alle* P *auf* c. $\mathfrak{E}$ *heißt* (C, c, μ)*-homogen, falls es eine Menge* $\mathfrak{M}$ *von* (C, c, μ)*-Korrelationen mit den folgenden Eigenschaften gibt:*

1. *Wenn* $P \not\mathrm{I} c$, $P \neq C$, $g \neq c$ *und* $\mu^{-1}(C P) \mathrm{I} g$, *dann existiert ein* $\sigma \in \mathfrak{M}$ *mit* $\sigma P = g$.

2. *Die zu* 1. *duale Aussage (wobei natürlich* μ^{-1} *durch* μ *zu ersetzen ist).*

Falls $C \not\mathrm{I} c$ und $\mu(P) = C P$ für alle $P \mathrm{I} c$, heißt nach Baer [3] die Ebene (C, c)-homogen.

Definition 1.9. *Die Ebene* $\mathfrak{E}$ *wird desarguesch genannt, wenn sie* (C, c)*-transitiv für alle* $C \in \mathfrak{P}$ *und* $c \in \mathfrak{G}$ *ist.*

Bei der Lenz-Barlotti-Klasseneinteilung handelt es sich um die Menge $\mathfrak{S}$ aller Punkt-Geraden-Paare (C, c), für die $\mathfrak{E}$ (C, c)-transitiv ist. Der Satz von Lenz [9] und Barlotti [4] lautet:

Satz A. $\mathfrak{S}$ *hat eine der folgenden Formen:*

I–1. $\mathfrak{S}$ *ist leer.*

I–2. $\mathfrak{S}$ *enthält genau ein Paar* (C, c), *wobei* $C \not\mathrm{I} c$ *gilt.*

I–3. $\mathfrak{S}$ *enthält genau zwei Paare* (C_i, c_i), $(i = 1, 2)$, *wobei* $C_i \mathrm{I} c_j$ *genau dann gilt, wenn* $i \neq j$ *ist.*

I–4. $\mathfrak{S}$ *enthält genau drei Paare* (C_i, c_i), $(i = 1, 2, 3)$, *wobei* $C_i \mathrm{I} c_j$ *genau dann gilt, wenn* $i \neq j$.

I–6. *Es gibt einen Punkt R, eine Gerade r durch R und eine umkehrbare Abbildung μ der Punkte von r auf die Geraden durch R mit den Eigenschaften:*

i) $\mu(R)=r$;

ii) $(C, \mu(C))\in\mathfrak{S}$ *falls* $C\neq R$;

iii) *Aus* $(C, c)\in\mathfrak{S}$ *folgt* $C\neq R$, $C\,\mathrm{I}\,r$ *und* $c=\mu(C)$.

II–1. $\mathfrak{S}$ *enthält genau ein Paar* (C, c), *wobei* $C\,\mathrm{I}\,c$ *gilt.*

II–2. $\mathfrak{S}$ *enthält genau zwei Paare* (C_i, c_i), *wobei* $C_1\,\mathrm{I}\,c_i$ $(i=1, 2)$ *und* $C_2\,\mathrm{I}\,c_1$, $\mathrm{I}\,c_2$ *ist.*

III–1. *Es gibt einen Punkt R und eine nicht durch R gehende Gerade r mit den Eigenschaften:*

i) *aus* $C\,\mathrm{I}\,r$ *folgt* $(C, RC)\in\mathfrak{S}$;

ii) *aus* $(C, c)\in\mathfrak{S}$ *folgt* $C\,\mathrm{I}\,r$ *und* $c=RC$.

III–2. *Wie* III–1, *aber auch* $(R, r)\in\mathfrak{S}$.

IV_a–1. *Es gibt eine Gerade r, so daß $\mathfrak{S}$ genau aus den Paaren (C, r) mit $C\,\mathrm{I}\,r$ besteht.*

IV_a–2. *Es existieren zwei verschiedene Punkte P und Q so, daß*

i) $(P, c)\in\mathfrak{S}$ *für alle* c, $Q\,\mathrm{I}\,c$.

ii) $(Q, c)\in\mathfrak{S}$ *für alle* c, $P\,\mathrm{I}\,c$.

iii) $(C, PQ)\in\mathfrak{S}$ *für alle* $C\,\mathrm{I}\,PQ$.

$\mathfrak{S}$ enthält keine weiteren Paare.

IV_a–3. *Es gibt eine Gerade r und eine umkehrbare Abbildung μ der Punkte von r auf sich mit $\mu(C)\neq C$ $(C\,\mathrm{I}\,r)$, und die Aussagen* IV_a–2, i), ii) *und* iii) *sind für $P=C$ und $Q=\mu(C)$, $C\,\mathrm{I}\,r$ beliebig, erfüllt. Diese Klasse enthält bis auf Isomorphie nur eine Ebene, die Andrésche Ausnahmeebene* (PICKERT [*14*]).

IV_b–1, 2, 3 *sind die zu den Klassen* IV_a–1, 2, 3 *dualen Klassen.*

V. *Es gibt einen Punkt R und eine Gerade r $(R\,\mathrm{I}\,r)$ mit den Eigenschaften:*

i) $(R, c)\in\mathfrak{S}$ *für alle* c, $R\,\mathrm{I}\,c$.

ii) $(C, r)\in\mathfrak{S}$ *für alle* C, $C\,\mathrm{I}\,r$.

$\mathfrak{S}$ enthält keine weiteren Paare.

VII–1. $\mathfrak{S}$ *besteht aus allen Paaren* (C, c) *mit* $C\,\mathrm{I}\,c$. *(Die Ebene ist eine echte, d.h. nicht desarguessche Moufang-Ebene.)*

VII–2. $\mathfrak{S}$ *besteht aus allen Paaren* (C, c). *(Die Ebene ist desarguessch.)*

Von LENZ stammt die grobe Einteilung gemäß den römischen Ziffern, von BARLOTTI die Verfeinerung gemäß den arabischen Ziffern. Die bei BARLOTTI noch aufgeführten Klassen I–5, 7, 8, II–3, $\mathrm{VI}_{a,b}$ wurden inzwischen als leer erkannt (OSTROM [*11*], PICKERT [*14*], SANS SOUCIE [*16*], SPENCER [*17*]). In §2 wird das Ergebnis von SPENCER, daß die Klasse II–3 leer ist, neu bewiesen. Eine Ebene gehört zur Klasse II–3, wenn die Menge $\mathfrak{S}$ aus den Paaren (C, c) wie bei I–6 und dem Paar (R, r) besteht.

SATZ 1.10. *Liegt $a \neq 0$ im mittleren Kern der multiplikativen Loop und ist T linear, so wird durch die folgenden Festsetzungen eine Kollineation σ erklärt, wobei $a a^{-1} = 1$:*

$$\sigma(x, y) = (a\,x, y), \qquad \sigma[m, b] = [m\,a^{-1}, b],$$
$$\sigma(m) = (m\,a^{-1}), \qquad \sigma[x] = [a\,x],$$
$$\sigma V = V, \qquad \sigma U V = U V.$$

BEWEIS. Zum Beweis ist nur noch $\boldsymbol{T}(m a^{-1}, a x, b) = T(m, x, b)$ nachzuweisen. Wegen der Linearität genügt dafür der Nachweis von $(m a^{-1})(a x) = m x$. Da $a \in N_m$ ist, folgt $a^{-1} \in N_m$ und daher $(m a^{-1})(a x) = m\big(a^{-1}(a x)\big) = m\big((a^{-1} a) x\big) = m x$.

BARTOLOZZI [5] hat diesen Satz für eine Translationsebene bewiesen.

SATZ 1.11 (PICKERT [12], S. 102/03). *Eine projektive Ebene $\mathfrak{E}$ ist genau dann (V, OU)-transitiv, wenn die multiplikative Loop eine Gruppe ist und $\boldsymbol{T}(m, x, mb) = m(x + b)$ gilt.*

SATZ 1.12 (PICKERT [12], S. 100). *$\mathfrak{E}$ ist genau dann (V, UV)-transitiv, wenn $\mathfrak{T}$ eine Gruppe bezüglich der Addition und $\boldsymbol{T}$ linear ist.*

DEFINITION 1.13. *Sei $\mathfrak{Q}$ ein Quasikörper, d.h. eine Menge mit zwei Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, die bezüglich $+$ eine Gruppe und nach Weglassen des Nullelements bezüglich der Multiplikation eine Loop ist und ferner die Bedingungen erfüllt:*

i) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *für alle* $a, b, c \in \mathfrak{Q}$;

ii) $-a \cdot x + b \cdot x = c$ *hat genau eine Lösung* $x \in \mathfrak{Q}$, *wenn* $a \neq b$.

Die Ebene mit $\mathfrak{Q} = \mathfrak{T}$ und $\boldsymbol{T}(a, b, c) = a \cdot b + c$ (für alle $a, b, c \in \mathfrak{Q}$) heißt die Ebene über $\mathfrak{Q}$.

§ 2. Die Klassen I-6 und II-3

§ 2.1. Die Hauptsätze. Die Sätze von PICKERT und YAQUB lassen sich folgendermaßen formulieren:

SATZ B (PICKERT [13].) *$\mathfrak{E}$ gehöre zur Klasse* II–3 *oder zur Klasse* I–6. *Das Koordinatenviereck wählen wir mit $V = R$; W, $U \mathrel{I} r$; $O \mathrel{I} \mu(U)$, und $E = OW \cap \mu(W)$: Dann gilt (mit $a a^{-1} = 1$ im Falle $a \neq 0$):*

i) $a^{-1} + (a + b) = 1 + b$, *für* $a, b \in \mathfrak{T}$, $a \neq 0, 1$.

ii) $1 + b = b + 1$ *für* $b \in \mathfrak{T}$.

iii) $(b + c) + 1 = b + (c + 1)$ *für* $b, c \in \mathfrak{T}$,

und daher gibt es eine (V, UV)-Kollineation σ mit $\sigma(x, y) = (x, y + 1)$.

iv) *Die (U, V, W)-Thomsen-Bedingung ([12], S. 59) mit der Einschränkung, daß zwei durch V gehende Geraden der Figur gleich $\mu(U)$ und $\mu(W)$ sind, kann nicht erfüllt werden, d.h. die Addition kann nicht zugleich kommutativ und assoziativ sein.*

SATZ C (SPENCER [17]). *Die Voraussetzungen sind wie in Satz* B. *Nach* SPENCER *und* PICKERT *wird eine Multiplikation $\circ$ mittels der nur von a*

abhängenden (W, EV)*-Kollineation* σ *definiert: Wenn* $\sigma[0]=[a]$ *ist, dann ist* $\sigma[x]=[a\circ x]$; $1\circ x=1$. *Ferner wird* $p^a=(pa\circ a^{-1})a$ *gesetzt. Die Behauptung lautet:*

i) $p^a q^a=(p\circ q)^a$ *für* $a\neq 0, 1$.

ii) *Die Klasse* II-3 *ist leer.*

Der Hauptsatz dieses Paragraphen ist:

SATZ D. *Unter den Voraussetzungen von Satz* B *gilt:*

i) $a\circ x+\big(-x+(mx+b)\big)=(m\circ a^{-1})(a\circ x)+\big(-a^{-1}+(ma^{-1}+b)\big)$ *für* $a\neq 0$.

ii) $a\circ b=a+(-ab+b)$ *für alle* $a, b\in\mathfrak{T}$,
$p^a=a+(-p+a^{-1})$ *für* $a\neq 0, 1$.

iii) *Ist* $a\circ b=ba$ *für* a, b *mit* $a, b, ab\neq 0, 1$, *dann gilt* $a^2=1$ *für alle* $a\neq 0, 1$; $1+1+1=0$, *und* $p(p+1)(p+1+1)=1$ *für alle* $p\neq 0, 1$.

iv) *Es existiert kein* $a\neq 0, 1$ *in* $\mathfrak{T}$ *mit der Eigenschaft:*

$$a+(-b+a^{-1})=b^{-1} \text{ für alle } b\neq 0, 1.$$

Um die Bedeutung von Satz D (Beweis s. S. 280) zu zeigen, werden zuerst aus D die Sätze B und C-ii gefolgert, wobei die bekannten und leicht zu beweisenden Tatsachen benutzt werden, daß unter den Voraussetzungen von Satz B $\mathfrak{T}-\{0\}$ eine Gruppe bezüglich der Multiplikation ist und $\mathfrak{T}-\{1\}$ eine Gruppe bezüglich der Verknüpfung $\circ$ ist. Beweise findet man in PICKERT [*13*]. Aus der Definition folgt sofort $0\circ x=x$ für alle x, da σ im Falle $\sigma[0]=[0]$ die Identität ist. Ebenso gilt $a\circ 0=a$ für $a\neq 1$ und $a\circ 1=1$ für alle a.

BEMERKUNG 2.1.1. *Gilt* $a\circ a^{-1}=0$ *für alle* $a\neq 0, 1$, *so folgt* $(a\circ b)^{-1}=b^{-1}\circ a^{-1}$ *für alle* $a, b\in\mathfrak{T}$ *mit* $a, b\neq 0, 1$ *und* $ab\neq 1$, *denn die Verknüpfung* $\circ$ *ist assoziativ. Daß* $a\circ a^{-1}=0$ *ist, folgert man aus* D-ii *und* B-i: $a\circ a^{-1}=a+(-1+a^{-1})=0$. *Diese Tatsache muß für den Beweis von Satz* D *direkt nachgewiesen werden.*

BEWEIS VON SATZ B. (i) In der Identität D-i setze ich $m=x=0$; dann bekomme ich:

$$a+b=aa^{-1}+(-a^{-1}+b)=1+(-a^{-1}+b).$$

Wenn ich b durch $a^{-1}+c$ ersetze, habe ich:

$$1+c=a+(a^{-1}+c).$$

Im Sonderfall $c=0$ ergibt sich $1=a+a^{-1}$.

B-ii und B-iii sind leichte Folgerungen von B-i. Für Beweise s. PICKERT [*13*].

(iv) Wäre die Addition zugleich kommutativ und assoziativ, dann wäre $b^a=a-b+a^{-1}=a+a^{-1}-b=1-b=b^{-1}$ für alle a, b mit a und $b\neq 0, 1$. Das widerspricht aber dem Satz D-iv.

BEWEIS VON SATZ C-ii. Eine Ebene der Klasse II-3 liege vor. Mit der gewählten Bezeichnung muß die Ebene (V, UV)-transitiv sein. Daher ist

die additive Loop von $\mathfrak{T}$ eine Gruppe. Durch D–i und D–ii kann ich jetzt C–i beweisen. Ich löse die Gleichung D–i nach $(m \circ a^{-1})(a \circ x)$ auf:

$$\begin{aligned}(m \circ a^{-1})(a \circ x) &= a \circ x - x + mx - ma^{-1} + a^{-1},\\ &= a - ax + x - x + mx - ma^{-1} + a^{-1},\\ (m \circ a^{-1})(a \circ x) &= a - (ma^{-1} - mx + ax) + a^{-1},\\ &= (ma^{-1} \circ ax)^{a} \quad \text{nach Satz D–ii.}\end{aligned}$$

Wenn ich $m=0$ setze, bekomme ich $a^{-1}(a \circ x) = (ax)^{a}$. Daher ist

$$(m \circ a^{-1})\, a a^{-1}(a \circ x) = (ma^{-1})^{a}(ax)^{a} = (ma^{-1} \circ ax)^{a}.$$

Wenn ich $p = ma^{-1}$ und $q = ax$ setze, ergibt sich C–i.

Es bleibt nur zu zeigen, daß die Voraussetzungen des Satzes D–iii erfüllt sind. Dann ist nämlich $1+1+1=0$, und wegen B–ii liegt $1+1=a$ im Zentrum der additiven Gruppe. Wie im Beweis des Satzes B–iv kommt man zu einem Widerspruch des Satzes D–iv, so daß C–ii bewiesen ist.

Zuerst bemerke ich, daß $-p+a^{-1} = -p+1-a = p^{-1}-a$ für $p \neq 0, 1$ gilt, und daher ist mit der Abkürzung $x^{\langle a \rangle} = a + x - a$ nach D–ii:

$$p^{a} = a - p + a^{-1} = (p^{-1})^{\langle a \rangle} \quad \text{gilt.}$$

Die folgenden Eigenschaften von $x^{\langle a \rangle}$ werden wir benötigen:

(1) Wenn $x^{\langle a \rangle} = y^{\langle a \rangle}$, so $x = y$.

(2) $x^{\langle b+a \rangle} = (x^{\langle a \rangle})^{\langle b \rangle}$.

Die erste Behauptung ist klar, denn x und $x^{\langle a \rangle}$ sind in der additiven Gruppe konjugierte Elemente.

Die zweite folgt nach einer leichten Rechnung:

$$x^{\langle b+a \rangle} = (b+a) + x - (b+a) = b + (a + x - a) - b = (x^{\langle a \rangle})^{\langle b \rangle}.$$

Für p^{a} und q^{a} und $(p \circ q)^{a}$ setze ich $(p^{-1})^{\langle a \rangle}$ usw. in C–i ein. Das darf ich tun, falls $p, q, p \circ q$ alle 0 und 1 verschieden sind. Nach Bemerkung 2.1.1 ist $a \circ a^{-1} = 0$, wenn $a \neq 0, 1$. Daher ist ebenfalls nach 2.1.1 $(p \circ q)^{-1} = q^{-1} \circ p^{-1}$, falls $p, q, p \circ q$ alle von 0 und 1 verschieden sind. Nun kann ich C–i so schreiben:

$$(p^{-1})^{\langle a \rangle}(q^{-1})^{\langle a \rangle} = (q^{-1} \circ p^{-1})^{\langle a \rangle};$$

d.h. wenn ich $x = p^{-1}$, $y = q^{-1}$ setze, wird

$$(3) \quad x^{\langle a \rangle} y^{\langle a \rangle} = (y \circ x)^{\langle a \rangle}$$

für alle a, x, y, die ebenso wie $y \circ x$ von 0 und 1 verschieden sind.

Mittels (2) rechne ich folgendermaßen:

$$\begin{aligned}(y \circ x)^{\langle b+a \rangle} &= \big((y \circ x)^{\langle a \rangle}\big)^{\langle b \rangle} \quad \text{für } a, b, b+a \neq 0, 1,\\ &= (x^{\langle a \rangle} y^{\langle a \rangle})^{\langle b \rangle} \quad \text{mittels (3).}\end{aligned}$$

Aber wegen $b+a\neq 0, 1$ haben wir auch:

$$\begin{aligned}(y\circ x)^{\langle b+a\rangle} &= x^{\langle b+a\rangle}\, y^{\langle b+a\rangle},\\ &= (x^{\langle a\rangle})^{\langle b\rangle}\,(y^{\langle a\rangle})^{\langle b\rangle},\\ &= (y^{\langle a\rangle}\circ x^{\langle a\rangle})^{\langle b\rangle} \quad \text{mittels (4).}\end{aligned}$$

Wegen (1) können wir schließen:

$$x^{\langle a\rangle}\, y^{\langle a\rangle} = y^{\langle a\rangle}\circ x^{\langle a\rangle} \quad \text{für alle } x, y, a,\ y\circ x\neq 0, 1.$$

Wenn ich q für $x^{\langle a\rangle}$ und p für $y^{\langle a\rangle}$ schreibe, habe ich $p\circ q = q\circ p$. Wegen (1) und $0^{\langle a\rangle}=0$, $1^{\langle a\rangle}=1$ bedeutet $x, y\neq 0, 1$ dasselbe wie $p, q\neq 0, 1$. Aus $y\circ x=0$ folgt $y=x^{-1}$, aber $(x^{-1})^{\langle a\rangle}=a+x^{-1}-a=a+1-x-a$. Aber 1 liegt im Zentrum, daher $(x^{-1})^{\langle a\rangle}=1+a-x-a=1-(x^{\langle a\rangle})=(x^{\langle a\rangle})^{-1}$, wenn a und x von 0 und 1 verschieden sind. Daher folgt aus $y\circ x=0$, $y^{\langle a\rangle}\circ x^{\langle a\rangle}=0$, d.h. $p\circ q=0$. Die Voraussetzung des Satzes D–iii ist erfüllt, und daher ist $1+1+1=0$. Wie vorher erwähnt, führt das zu einem Widerspruch.

In der Diskussion brauchte ich die Existenz eines b mit $a, b, b+a\neq 0, 1$; d.h. $a\neq 0, 1$ und $b\neq 0, 1, a^{-1}, -a$. Diese ist offenbar gesichert, wenn der Koordinatenbereich mindestens fünf Elemente enthält. Andernfalls ist bekanntlich die Ebene desarguessch, also weder von Typ I–6 noch von Typ II–3. Wie man ohne Rückgriff darauf auskommt, zeigt

LEMMA 2.1.2. *Der Koordinatenbereich einer Ebene der Klasse* I–6 *oder der Klasse* II–3 *besteht aus mehr als vier Elementen.*

BEWEIS. Ich führe die Annahme, daß der Koordinatenbereich aus höchstens vier Elementen besteht, zum Widerspruch. Dazu brauche ich nur etwa die (V, OU)-Transitivität zu beweisen, denn diese kann bei der Klasse I–6 oder II–3 nicht zutreffen. Um die (V, OU)-Transitivität zu zeigen, muß ich nur noch das Rechtsdistributivgesetz $a(b+c)=ab+ac$ beweisen (Satz 1.11), denn T ist ja linear und die Multiplikation assoziativ.

Fall 1. $\mathfrak{T}=\{0, 1\}$. Dieser Fall ist trivial.

Fall 2. $\mathfrak{T}=\{0, 1, a\}$. Es muß dann $a^2=1$ sein und daher nach B–i, $a+a=1$. Außerdem ist $a+1=0$ und daher $1=(a+1)+1=a+(1+1)$, was nun aber $a=1+1$ nach sich zieht. Also ist $\mathfrak{T}$ das Galoisfeld mit drei Elementen, und es gelten beide Distributivgesetze.

Fall 3. $\mathfrak{T}=\{0, 1, a, b\}$. Es muß $b=a^2$ sein, da die multiplikative Gruppe die Ordnung 3 hat. Wegen $a^2\neq 1$ muß $a^2=a\circ a$ sein, wegen $a\circ a=a+(-a+a)$ also $-a+a^2=-a^2+a$. Daher gibt es ein c mit $a^2=a+c$ und $a=a^2+c$. Die Annahmen $c=0, a, a^2$ führen sofort zu einem Widerspruch, da nach B–i $a+a^2=a^2+a=1$ ist. Es bleibt nur noch $c=1$. Daher ist $a^2+a^2=a^2+(a+1)=1+1=a+(a^2+1)=a+1$. Es muß $1+1=0$ sein, sonst hätten wir entweder $a=0$, $a^2=0$ oder $1=0$. Außerdem muß $a^2=a+1$ und $a=a^2+1$ sein. Daher liegt das Galoisfeld mit vier Elementen vor, und es gelten wieder die beiden Distributivgesetze.

§ 2.2. Der Beweis von Satz D. Ich schicke einige Lemmata voraus, bei denen stets die Voraussetzung von B gelten soll.

LEMMA 2.2.1. *Ist τ eine Kollineation und μ die in der Definition von* I–6 *und* II–3 *erwähnte Abbildung der Punkte von r auf die Geraden durch R, dann gilt:*

i) $\mu\tau(m) = \tau\mu(m)$ *für alle* $m \in \mathfrak{T}$.

ii) $\mu(a^{-1}) = [a]$ *falls* $a \neq 0, 1$,

$\mu(a) = [a]$ *falls* $a = 0, 1$.

BEWEIS. i) Wenn die Ebene $\mathfrak{E}$ (C, c)-transitiv ist, ist sie auch $(\tau(C), \tau(c))$-transitiv. Daher liegen C und $\tau(C)$ auf r, und die Gleichungen $c = \mu(C)$ und $\tau(c) = \mu\tau(C)$ mit $C = (m)$ ergeben i).

ii) Ich nehme für τ die in Satz 1.10 definierte Kollineation σ. Dann ist $\sigma[1] = [a]$ und $\sigma(1) = (a^{-1})$ für $a \neq 0, 1$. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, daß $\mu(1) = [1]$. Ich darf i) anwenden mit $m = 1$:

$$\mu\sigma(1) = \sigma\mu(1) = \sigma[1] = [a].$$

Anderseits gilt $\mu\sigma(1) = \mu(a^{-1})$ für $a \neq 0, 1$. Wegen $\mu(0) = [0]$ ist damit ii) bewiesen.

LEMMA 2.2.2[3]). *Zu jeder nichtidentischen (W, EV)-Kollineation τ von $\mathfrak{E}$ gibt es ein $a \neq 0, 1$ mit:*

$$\tau(x, y) = \big(a \circ x, a \circ x + (-x + y)\big), \quad \tau[m, b] = \big[m \circ a^{-1}, -a^{-1} + (m\, a^{-1} + b)\big],$$

$$\tau(m) = (m \circ a^{-1}), \qquad \tau[x] = [-a \circ x],$$

$$\tau V = V, \qquad \tau U V = U V.$$

Außerdem ist $a \circ a^{-1} = 0$ für $a \neq 0, 1$.

BEWEIS. Die Verknüpfung $\circ$ wurde schon auf S. 274 definiert durch die (W, EV)-Kollineationen. Unmittelbar aus der Definition einer (W, EV)-Kollineation folgt $\tau V = V$, $\tau U V = U V$. Daher geht die Menge aller von V verschiedenen Punkte auf UV in sich über, d.h. zu jedem $m \in \mathfrak{T}$ gibt es ein $m' \in \mathfrak{T}$ mit $\tau(m) = (m')$; die Menge aller nicht auf UV liegenden Punkte geht in sich über, d.h. zu jedem Paar $x, y \in \mathfrak{T}$ gibt es $x', y' \in \mathfrak{T}$ mit $\tau(x, y) = (x', y')$. Auf dieselbe Weise sieht man, daß es zu Elementen m, b, x stets Elemente $m'', b', x'' \in \mathfrak{T}$ gibt, so daß $\tau[m, b] = [m'', b']$ und $\tau[x] = [x'']$ ist. Da $(m)\,\mathrm{I}\,[m, b]$ ist, folgt $(m')\,\mathrm{I}\,[m'', b']$ und daher $m' = m''$. Wegen $(x, y)\,\mathrm{I}\,[x]$ hat man $(x', y')\,\mathrm{I}\,[x'']$ und daher $x' = x'' = a \circ x$.

1. $\tau(x, y) = \big(a \circ x, a \circ x + (-x + y)\big)$:

Wir wissen schon, daß $x' = a \circ x$ ist. Durch (x, y) und W geht nur eine Gerade $[1, b]$ für geeignetes $b \in \mathfrak{T}$. Weil $\tau[1, b] = [1, b]$ sein muß, liegt (x', y') auf $[1, b]$. Daher gelten die Gleichungen

$$y = x + b, \quad \text{d.h.} \quad b = -x + y$$

und

$$y' = x' + b' = a \circ x + (-x + y).$$

[3]) Frau YAQUB hat eine etwas anders aussehende, aber äquivalente Koordinatendarstellung für τ. Sie hat auch gezeigt, daß $1 + 1 = 0$ ist, falls beide Inversbedingungen für die Addition gelten. Das letzte ist eine leichte Folgerung aus D-iv.

2. $a \circ a^{-1} = 0$ für $a \neq 0, 1$:

$$\tau\{(0, 0) \cup (1, a)\} = (a, a) \cup (1, a),$$

d.h. $\tau[a, 0] = [0, a]$, also ist $\tau(a) = (0)$ und daher

$$[0] = \mu(0) = \mu\tau(a) = \tau\mu(a) = \tau[a^{-1}] = [a \circ a^{-1}],$$

d.h. $a \circ a^{-1} = 0$.

Auf Grund von Bemerkung 2.1.1 haben wir also $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$ für alle a, b mit $a, b, ab \neq 0, 1$.

3. $\tau(m) = (m \circ a^{-1})$:

Wenn $m \neq 0, 1$ ist, folgt $\tau[m^{-1}] = [a \circ m^{-1}]$, also

$$\tau(m) = \tau\mu^{-1}[m^{-1}] = \mu^{-1}\tau[m^{-1}] = \big((a \circ m^{-1})^{-1}\big) = (m \circ a^{-1}),$$

falls $a \neq 0, 1$ und $m \neq a, 0, 1$.

Wir wissen aus 2., daß $\tau(a) = (0)$ ist. Aber es gilt $a \circ a^{-1} = 0$, daher stimmt die Formel für $m = a$; ist $m = 1$, so ist $1 \circ a^{-1} = 1$ und $\tau(1) = (1)$; wegen $\tau[0, 0] = \tau\{(0), (0) \cup (1, 0)\} = (a, a) \cup (1, 0) = [a^{-1}, a^{-1}]$ ist schließlich $\tau(0) = (0 \circ a^{-1}) = (a^{-1})$.

4. $\tau[m, b] = [m \circ a^{-1}, -a^{-1} + (ma^{-1} + b)]$:

Wir wissen aus 3., daß $m' = m \circ a^{-1}$ ist; deshalb brauchen wir nur b' zu bestimmen.

$$\begin{aligned} \tau\{[m, b] \cap [a^{-1}]\} &= [m', b'] \cap [0] = (0, b'), \\ &= \tau(a^{-1}, ma^{-1} + b), \\ &= \big(0, -a^{-1} + (ma^{-1} + b)\big) \quad \text{wegen 1.} \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma bewiesen.

LEMMA 2.2.3. i) $p^a q^a = (p \circ q)^a$.

ii) $p^a \circ q^a = (pq)^a$.

iii) $p^a = a^{-1}(a \circ a^{-1} p)$.

BEWEIS. Zur Vereinfachung nehme ich (iii) als Definition von p^a, weise (ii) und (iii) nach und erhalte schließlich wieder $p^a = (pa \circ a^{-1})a$.

Da $p \to p^a$ offensichtlich eine umkehrbare Abbildung von $\mathfrak{T}$ auf sich ist, besagen (i), (ii) übrigens, daß diese Abbildung ein Isomorphismus von $(\mathfrak{T}, \cdot)$, (wobei $\cdot$ die Multiplikation in $\boldsymbol{T}$ bedeutet) auf $(\mathfrak{T}, \circ)$ und ein solcher von $(\mathfrak{T}, \circ)$ auf $(\mathfrak{T}, \cdot)$ ist.

i) Sei σ die (U, OV)-Kollineation mit $\sigma[1] = [a]$ und τ eine beliebige (W, EV)-Kollineation. Es sei $\tau[0] = [b]$, so daß $b \neq 1$ ist. Wir wollen $\sigma^{-1}\tau\sigma[x]$ ausrechnen:

$$\sigma^{-1}\tau\sigma[x] = \sigma^{-1}\tau[ax] = \sigma^{-1}[b \circ ax] = [a^{-1}(b \circ ax)],$$

wegen 1.11 und der Definition von $\circ$ in Satz C.

Nach 1.11 gilt $\sigma(a) = (1) = W$, und $\sigma[a^{-1}] = [1] = EV$. Daher ist bekanntlich $\eta = \sigma^{-1}\tau\sigma$ eine $((a), [a^{-1}])$-Kollineation. Genau so beweist man, daß auch $\eta_1 = \tau_1^{-1}\sigma_1\tau_1$ eine $((a), [a^{-1}])$-Kollineation ist, wenn τ_1 die (W, EV)-Kollineation

ist, die $[0]$ in $[a]$ überführt, und σ_1 eine beliebige (U, OV)-Kollineation ist; denn man hat ja nach Lemma 2.2.2 $\tau_1[a^{-1}]=[a\circ a^{-1}]=[0]=OV$, $\tau_1(a)=(a\circ a^{-1})=(0)=U$. Sei $\sigma_1[1]=[c]$, also $c\neq 1$. Dann ist $\eta_1[x]=[a^{-1}\circ c(a\circ x)]$. Es ist klar, daß jede $((a),[a^{-1}])$-Kollineation sich auf diese zwei Arten schreiben läßt. Sie nun $\eta[0]=\eta_1[0]=d$, dann ist $\eta=\eta_1$ und es folgt $b=ad$, $c=(a\circ d)a^{-1}=(a\circ a^{-1}b)a^{-1}$; $[a^{-1}(b\circ ax)]=\eta[x]=\eta_1[x]=[a^{-1}\circ(a\circ a^{-1}b)a^{-1}(a\circ x)]$, also $a^{-1}(b\circ ax)=a^{-1}\circ(a\circ a^{-1}b)a^{-1}(a\circ x)$ für alle x und alle $b\neq 1$. Wegen

$$a^{-1}(a\circ x)=a^{-1}(a\circ a^{-1}ax)=(ax)^a,$$

$$a\circ a^{-1}b=aa^{-1}(a\circ a^{-1}b)=ab^a,$$

$$a^{-1}(b\circ ax)=a^{-1}\circ(a\circ a^{-1}b\circ ax)=a^{-1}\circ a(b\circ ax)^a,$$

folgt daraus:

$$a^{-1}\circ a(b\circ ax)^a=a^{-1}\circ\big(a(b^a)(ax)^a\big),$$

wegen $a\neq 0, 1$, also:

$$(b\circ ax)^a=b^a(ax)^a \quad \text{für alle } x \text{ und alle } b\neq 1.$$

Mit $p=b$ und $q=ax$ bekomme ich $p^aq^a=(p\circ q)^a$ für alle $p\neq 1$ und alle q. Wegen $1^a=a^{-1}(a\circ a^{-1}1)=0$ ist:

$$(1\circ q)^a=1^a=0=0q^a=1^aq^a,$$

also gilt (i) im Falle $p=1$.

Beweis von (ii). Ich bemerke zuerst, daß

$$(p^a)^{a^{-1}}=a\big(a^{-1}\circ a\,a^{-1}(a\circ a^{-1}p)\big)=p, \quad \text{falls} \quad a\neq 0, 1.$$

Daher ist

$$pq=(p^a)^{a^{-1}}(q^a)^{a^{-1}}=(p^a\circ q^a)^{a^{-1}},$$

und daher

$$(pq)^a=\big((p^a\circ q^a)^{a^{-1}}\big)^a=p^a\circ q^a, \quad \text{falls} \quad a\neq 0, 1.$$

Beweis von (iii). $0=1^a=(pp^{-1})^a=p^a\circ(p^{-1})^a$, falls $a\neq 0, 1$, und $p\neq 0$. Daher ist wegen 2.2.2(ii), $p^a=\big((p^{-1})^a\big)^{-1}=(pa\circ a^{-1})a$. Diese Formel stimmt auch für $p=0$, da ja $0^a=1$ ist.

Lemma 2.2.4. $(a\circ a)^2=a=a^2\circ a^2$, *für* $a^2\neq 1$.

Beweis. Der Satz ist für $a=0$ trivial. Falls $a\neq 0, 1$ ist, kann man $p=q=a$ in Lemma 2.2.3(i) einsetzen und die Tatsache $a^a=a^{-1}(a\circ a^{-1}a)=a^{-1}$ benutzen:

$$a^{-2}=a^aa^a=(a\circ a)^a=a^{-1}\big(a\circ a^{-1}(a\circ a)\big).$$

Man löst nach $a\circ a$ auf:

$$a\circ a=a(a^{-1}\circ a^{-1})=a(a\circ a)^{-1},$$

nach 2.1.1 wegen $a\circ a\neq 0$, und damit haben wir $(a\circ a)^2=a$.

Setzt man nun $p=q=a\circ a$ in 2.2.3(ii) ein, dann bekommt man:

$$a^{-1}=a^a=\big((a\circ a)(a\circ a)\big)^a=(a\circ a)^a\circ(a\circ a)^a=a^{-2}\circ a^{-2},$$

auf Grund von 2.2.3(i). Also gilt: $a=(a^{-2}\circ a^{-2})^{-1}=a^2\circ a^2$.

ZUSATZ 2.2.5. i) *Falls* $a^2 \neq 1$ *ist, besitzt* a *genau eine Quadratwurzel, nämlich* $a \circ a$.

ii) *Ein Element gerader Ordnung hat notwendig die Ordnung* 2.

BEWEIS. i) Sei $b^2 = c^2 = a \neq 1$. Daraus folgt

$$b = b^2 \circ b^2 = a \circ a = c^2 \circ c^2 = c.$$

Wegen $a^2 \neq 1$ gilt $(a \circ a)^2 = a$.

ii) Sei $a^{2\gamma} = 1$, $a^\gamma \neq 1$, $\gamma \neq 1$.

Das Element $b = a^{(1+\gamma)}$ hat zwei Quadratwurzeln, a und $a^{1+\gamma}$. Wegen i) folgt $b^2 \neq 1$, also $a^4 = 1$. Das Element a hat also die Ordnung 2 oder 4. Ist $a^2 \neq 1$, so gibt es nach (i) ein c mit $c^2 = a$ und dieses hat wegen $c^8 = 1$ gerade Ordnung, nach dem eben Bewiesenen also die Ordnung 2 oder 4, was den Widerspruch $a^2 = 1$ ergibt. Also ist $a^2 = 1$.

BEWEIS VON SATZ D. i) Man erhält diese Identität sofort aus Lemma 2.2.2, wenn man beachtet, daß $(x, y) \mathrm{I} [m, b]$ die Inzidenz $\tau(x, y) \mathrm{I} \tau [m, b]$ nach sich zieht.

ii) Setze ich in i) $m = a$ und $b = -ax + x$, so ergibt sich:

$$a \circ x = -a^{-1} + (1 + (-ax + x)).$$

Daraus aber folgt die erste Identität in D–ii mittels der Identität B–i, die ja nach S. 274 aus D–i folgt. Setze ich in i) $m = pa$, $x = 0$ und $b = -p + a^{-1}$, so bekomme ich die zweite Identität von D–ii.

iii) Vorausgesetzt wird $a \circ b = ba$ für alle a und b mit $a, b, ab \neq 0, 1$. Wegen Lemma 2.2.4 ist $a^2 \circ a^2 = a$, falls $a^2 \neq 1$. Da nach 2.2.5 $a^4 \neq 1$ gilt, muß also $a^2 \circ a^2 = a^4$, und daher $a^4 = a$, d.h. $a^3 = 1$ sein. Ich nehme ein $b \neq 0, 1, a, a^{-1}$ an und bemerke, daß auch b^a und $a^{-1}b \neq 0, 1, a, a^{-1}$. Dann folgt mittels der Voraussetzung und Lemma 2.2.3

$$a(b^a) = a \circ a^{-1}b = a \circ b \circ a^{-1} = ba \circ a^{-1} = b^a a^{-1}.$$

Da $b \to b^a$ eine Abbildung von $\mathfrak{T} = \{0, 1, a, a^{-1}\}$ auf sich ist, besagt das $ax = xa^{-1}$ für $x \neq 0, 1, a, a^{-1}$. Es gilt auch $a \neq 0, 1, x, x^{-1}$ und somit $xa = ax^{-1}$. Aber dann ist $x^2 = x(axa) = (xax)a = a^2$. Wenn ein Element von der Ordnung 2 ist, müssen daher alle Elemente $\neq 0, 1$ Ordnung 2 haben. Die einzige andere Möglichkeit ist $a^3 = 1 = x^3$. Die Gleichung $x^2 = a^2$ zieht dann $x = a$ nach sich. Daher kann $\mathfrak{T}$ nur aus den vier Elementen $0, 1, a, a^{-1}$ bestehen, was aber dem Lemma 2.1.2 widerspricht. Es bleibt nur noch der Fall, daß alle Elemente die Ordnung 2 haben. Die Multiplikation ist dann bekanntlich kommutativ. Falls $1 + 1 \neq 0$ ist, gilt dann wegen B–i $1 + 1 + 1 + 1 = 1$, und daher $1 + 1 + 1 = 0$.

Es gibt nun ein $p \neq 0, 1, -1$ und für dieses gilt:

$$p \circ (p + 1)p = (p + 1)p^2 = p + 1 \neq 1, 0,$$

aber nach D–ii)

$$p \circ (p + 1)p = p + (-p(p + 1)p + (p + 1)p),$$
$$= p + (-(p + 1) + (p + 1)p),$$

Vergleich der ersten mit der dritten Gleichung ergibt

$$1 = -(p+1) + (p+1)p$$

und daher:

$$(p+1)p = (p+1) + 1 .$$

Im Falle $1+1=0$ hat man nach B–iii) $(p+1)+1=p$. Also ergibt sich $(p+1)p=p$ im Widerspruch zu $p \neq 0$. Daher führt die Annahme $1+1=0$ zum Widerspruch.

D–iv): Wenn es ein $a \neq 0, 1$ mit $a+(-b+a^{-1})=b^{-1}$ für alle $b \neq 0, 1$ gibt, dann ist wegen d–ii) $b^a = b^{-1}$, und nach Lemma 2.2.3 gewinnt man $p \circ q = qp$ für $p, q, pq \neq 0, 1$. Daher ist nach D–iii) $1+1+1=0$ und $a^2=1$ für alle $a \neq 0$. Aber es gilt nach Lemma 2.2.3 $b^a = a^{-1}(a \circ a^{-1}b) = a^{-2}ba = ba$, falls $b \neq 0, 1, a$. Daher ist $b^{-1} = ba$, und wegen $b^2 = 1$ widerspricht das der Annahme $a \neq 1$. Damit ist Satz D bewiesen.

§ 2.3. Endliche Ebene der Klasse I-6. Die folgenden Sätze beziehen sich alle auf eine endliche Ebene. Unter ihrer Ordnung n versteht man die um 1 verminderte Anzahl der Punkte einer Geraden, also die Elementeanzahl von $\mathfrak{T}$. In Satz B–iii) wurde schon gezeigt, daß 1 im rechten Kern der additiven Loop liegt. Ein Analogon zum Satz von LAGRANGE besagt, daß die Ordnung einer Untergruppe eines der Kerne die Loopordnung teilt (BRUCK [6]).

SATZ 2.3.1. *n ist keine Primzahl.*

Wenn n Primzahl wäre, müßte der Rechtskern der additiven Loop, da er mindestens zwei Elemente, nämlich 0 und 1, enthält, mit der Loop zusammenfallen und daher wäre die Addition assoziativ im Widerspruch zum Satz C–ii).

SATZ 2.3.2. *Wenn es mindestens ein Element der Ordnung 2 in der multiplikativen Gruppe gibt, dann ist $1+1 \neq 0$.*

BEWEIS. Nach dem Satz von LAGRANGE ist $2 \mid n-1$, wenn es ein Element der Ordnung 2 in der multiplikativen Gruppe gibt. Aber wenn $1+1=0$ ist, dann folgt $2 \mid n$, weil 1 im rechten Kern liegt.

SATZ 2.3.3. *Wenn alle Elemente $\neq 1$ der multiplikativen Gruppe die Ordnung 2 haben, dann ist die Ordnung der Ebene keine Primzahlpotenz.*

BEWEIS. Da alle Elemente $\neq 1$ der multiplikativen Gruppe die Ordnung 2 haben, ist $n-1=2^\alpha$, und nach Satz 2.3.2 gilt $1+1 \neq 0$. Daher ist $(1+1)^{-1} = 1+1$ und $1+1+1+1=1$ wegen B–i). Es folgt $1+1+1=0$ und daher $3 \mid n$. Wir haben vorausgesetzt, daß n eine Primzahlpotenz ist. Daher ist $n = 3^\beta = 2^\alpha + 1$,

$$2^\alpha = 3^\beta - 1 = (3-1)(3^{\beta-1} + \cdots + 3 + 1),$$

$$2^{\alpha-1} = 3^{\beta-1} + \cdots + 3 + 1 \equiv \beta \bmod 2 .$$

Entweder ist $\alpha = 1$ oder $\beta \equiv 0 \bmod 2$. Im ersten Fall wäre $n=3$ und die Ebene desarguessch. Im zweiten Fall können wir $\beta = 2 \cdot \gamma$ setzen und haben $2^\alpha = (3^\beta - 1)(3^\beta + 1)$. Wir können daher $3^\beta - 1 = 2^\delta$ $3^\beta + 1 = 2^\varepsilon$ setzen und

erhalten $2 \cdot 3^\beta = 2^\delta(1+2^{\varepsilon-\delta})$. Wegen $\gamma > 0$ folgt darus $\delta = 1$ und somit $3^\beta - 1 = 2$, also $\beta = 1$. Die Ebene hat dann die Ordnung 9. Um einen Widerspruch zu bekommen, brauche ich nur die Addition zu betrachten. Bezüglich der von 1 erzeugten Gruppe gibt es zwei weitere Links-Nebenklassen, deren Vertreter ich mit a und b bezeichne. Mit Hilfe der für $x \neq 0, 1$ geltenden Gleichungen $x+x=1$, $1+x=x+1$, $x+(x+y)=1+y$ gewinne ich $a+a=1$, $a+(a+1)=1+1$, $a+(a+1+1)=0$, $b+1=1+b$, also $a+b \neq 0, 1, 1+1, b+1$. Da offenbar $a+b \neq b, a, a+1, a+1+1$ gilt, muß $a+b = b+1+1$ sein, woraus $(a+1)+b \neq b+1+1$ folgt. Wegen $(a+1)+(a+1)=1$, $(a+1)+(a+1+1)=1+1$, $b+1=1+b$, $(a+1)+1+1=a$ gilt $(a+1)+b \neq 1, 1+1, b+1, a$. Da offenbar $(a+1)+b \neq b, a+1, a+1+1$ ist, muß also $(a+1)+b=0$ sein. Daraus folgt $(a+1)+(b+1)=1$, wegen $(a+1)+(a+1)=1$ also der Widerspruch $a+1=b+1$.

SATZ 2.3.4. $n \neq 16$.

BEWEIS. Die multiplikative Gruppe hat im Falle $n=16$ die Ordnung 15 und ist daher zyklisch. Sei a ein erzeugendes Element. Es gilt $(a \circ a)^2 = a = (a^8)^2$, so daß $a^8 = a \circ a$ und daher nach Lemma 2.2.3 $a(a^{-1} \circ a^9) = (a^8)^{a^{-1}} = (a \circ a)^{a^{-1}} = a^{-2}$ gilt. Daher ist $a^{-1} \circ a^9 = a^{-3} = a^{12}$. Wegen $a^9 \circ a^9 = a^{24} \circ a^{24} = a^{12}$ ist also $a^9 \circ a^9 = a^{-1} \circ a^9$, was wegen $a^9 \neq 1$ und $a^{-1} \neq a^9$ einen Widerspruch darstellt.

Die Identität $a^2 \circ a^2 = a$, falls $a^2 \neq 1$, läßt sich mittels der Addition nach Satz D–ii) so schreiben:

$$a^2 + (-a^4 + a^2) = a, \quad \text{falls } a^2 \neq 1.$$

Daher gilt $-a^2 + a = -a^{2^n} + a^{2^{n-1}} = t$ mit einem von n unabhängigen Element t für alle natürlichen Zahlen n mit $a^{2^{n-1}} \neq 1$. Falls die multiplikative Gruppe von a erzeugt wird und die Ordnung von a eine ungerade Primzahl p ist, durchläuft a^{2^n} $(n = 0, 1, \ldots)$ bekanntlich alle von 0 verschiedenen Potenzen von a. Da $t=0$ wegen $a \neq 0, 1$ unmöglich ist, muß daher $t=1$ sein. Wegen $a^{2^n} + 1 = a^{2^{n-1}}$ (für alle $n = 1, 2, \ldots$) ist $x+1 \neq 0$ für alle $x \neq 0, 1$ und somit $1+1=0$. Für $b = a^{2^{p-2}}$ gilt nun $b^2 = a$, so daß man neben $a^2+1=a$ auch $a+1=b$ und daher $a^2 = a^2+(1+1) = (a^2+1)+1 = a+1 = b = a^{2^{p-2}}$ hat, woraus $p=3$ folgt. Dann muß aber $n=4$ sein, was nach Lemma 2.1.2 nicht sein kann. Damit haben wir den

SATZ 2.3.5. $n-1$ *ist keine Primzahl.*

Die vorhergehenden Sätze schließen eine ganze Reihe von Ordnungen für $\mathfrak{E}$ aus: nach 2.3.1 kann $\mathfrak{E}$ nicht die Ordnung 11, 13, 17 usw. haben: nach 2.3.3 kann $\mathfrak{E}$ nicht die Ordnung 9, 17 usw. haben: nach 2.3.5 kann $\mathfrak{E}$ nicht die Ordnung 12, 14, 18 usw. haben.

§ 3. Beispiele endlicher Ebenen der verschiedenen Klassen

3. Dank der allerdings nur teilweise veröffentlichten Arbeiten von YAQUB und SALZMANN haben wir Beispiele topologischer, meist zur reellen Ebene homöomorpher Ebenen der $L-B$-Klassen außer I–6 und IV_a–1, IV_b–1. Ich

gebe in diesem Paragraphen Beispiele endlicher Ebenen der Klassen I–1, IV–1, 2 und 3, V und VII–2. Wegen des Artin-Zornschen Satzes (jeder endliche Alternativkörper ist bereits ein Körper) kann es kein Beispiel der Klasse VII–1 mit endlich vielen Punkten auf einer Geraden geben. Für die anderen nicht erwähnten Klassen sind keine endlichen Beispiele bekannt.

Die Klasse I–1. Sei $\mathfrak{Q}$ ein endlicher Fastkörper, der als Vektorraum vom Grad 2 über seinem Zentrum aufgefaßt werden kann. Das Zentrum von $\mathfrak{Q}$ ist isomorph zum $GF(q^n)$ für eine geeignete Primzahl q. Hughes [7] hat gezeigt, daß man mittels $\mathfrak{Q}$ eine Ebene der Ordnung q^{2n} definieren kann, deren Kollineationsgruppe auf der Punktmenge und auf der Geradenmenge einer Unterebene der Ordnung q^n transitiv ist, und die Ebene ist nicht desarguessch, falls $\mathfrak{Q}$ kein Körper ist. Von jeder solchen nichtdesarguesschen Ebene wird im folgenden gezeigt, daß sie zur Klasse I–1 gehört. Wäre die Ebene (C, c)-transitiv für irgendeinen Punkt C aus der oben erwähnten Unterebene, dann wäre die Ebene (P, p)-transitiv für jeden Punkt P der Unterebene und geeignete Gerade p. Die Tabelle der Klassen zeigt, daß die Ebene nur zur Klasse VII gehören kann, und daher desarguessch ist — ein Widerspruch. Ein duales Argument zeigt, daß die Ebene für keine Gerade c der Unterebene (C, c)-transitiv ist. Wenn die Ebene für ein Paar (C, c), (C, c)-transitiv wäre, müßten daher C und c außerhalb der Unterebene liegen.

Für die Anzahlen $\alpha = q^{2n} - q^n$ der Punkte einer Geraden der Unterebene, die nicht zur Unterebene gehören, $\beta = q^{2n} + q^n + 1$ der Geraden der Unterebene, $\gamma = q^{2n} + q^n + 1$ der Punkte der Unterebene gilt $\alpha\beta + \gamma = q^{4n} + q^{2n} + 1$, und das ist die Anzahl der Punkte der Ebene. Daher liegt C sicher auf einer und somit auf genau einer Geraden der Unterebene. Auf jeder Geraden der Unterebene liegt daher ein Punkt C derart, daß die Ebene (C, c)-transitiv für eine geeignete Gerade c ist. Da es $\beta = q^{2n} + q^n + 1$ derartige verschiedene Punkte C gibt, kann die Ebene nur zur Klasse VII gehören, (sonst ist die Anzahl der möglichen Zentren höchstens $q^{2n} + 2$) — ein Widerspruch.

Die Klassen IV–2, 3. André [2] hat bewiesen, daß die Ebene über einem Fastkörper (assoziativer Quasikörper, der kein Körper ist) zur Klasse IV–3 gehört, wenn $q^n = 3$ ist, und sonst zur Klasse IV–2. Je nachdem welches Distributivgesetz gilt, handelt es sich um Klasse IV_a oder IV_b (s. z. B. Pickert [12], S. 108).

Die Klasse IV–1[4]). Sei nun $\mathfrak{Q}$ ein Hallscher Quasikörper (Pickert [12], S. 96). $\mathfrak{Q}$ kann als zweidimensionaler Vektorraum über $K = GF(p^n)$ aufgefaßt werden. Es gilt das Rechtsdistributivgesetz $a(b + c) = ab + ac$. Multiplikation mit Elementen aus K ist assoziativ und distributiv, und jedes Element

[4]) Herr Glock hat einen Fehler auf S. 108 von [12], Zeile 3 und 4, gefunden. Wenn $\mathfrak{E}$ (R, R)-transitiv ist und zur Klasse V gehört, besitzt $\mathfrak{E}$ bezüglich eines Koordinatensystems mit $RIUV$ und $V \neq R$ einen Ternärkörper, der ein nicht-distributiver Quasikörper ist. Zeile 3 muß daher lauten:

IV_a Wenn $\mathfrak{R}$ nicht-distributiver Rechtsquasikörper ist, und es kein Koordinatensystem derart gibt, daß die Ebene über in diesem einen distributiven Quasikörper als Ternärkörper hat.

$x \in \mathfrak{L} - K$ erfüllt die Gleichung $f(x) = 0$, wobei $f(X)$ ein in $K[X]$ irreduzibles quadratisches Polynom ist. Es ist bekannt, daß für $p^n > 3$ die Multiplikation weder distributiv noch assoziativ ist. Im folgenden sei $p^n > 3$. Die zugehörige Ebene ist dann von einer der Klassen IV_a–1, 2 oder V. Die Klasse IV_a–3 scheidet nämlich deshalb aus, weil bei ihr nach OSTROM [*11*] die Ordnung $p^{2n} = 9$ sein muß. Sei a ein erzeugendes Element der multiplikativen Gruppe von K. Die Abbildung $(m) \to (ma^{-1})$ kann wie in Satz 1.10 zu einer Kollineation σ der Ebene mit $\sigma V = V$ fortgesetzt werden und hat die Ordnung $p^n - 1$. Wenn die Ebene (C, C)-transitiv wäre für ein C mit $C \mathrel{I} U$ V, $C \neq V$, wäre sie auch $(\sigma^m C, \sigma^m C)$-transitiv und müßte zur Klasse VII–1 gehören, weil $\sigma C \neq C$. Das ist aber nicht der Fall. Weil $\mathfrak{L}$ nicht distributiv ist, ist die Ebene nicht (V, V)-transitiv, und daher nicht von der Klasse V. Wäre sie von der Klasse IV_a–2, dann müßte sie (P, Q)-transitiv sein für genau ein Paar P, Q auf UV. Weil $\mathfrak{L}$ nicht assoziativ ist, darf ich annehmen, daß Q von U, V verschieden ist. Dann bekomme ich, daß die Ebene $(\sigma^m P, \sigma^m Q)$-transitiv ist für $p^n - 1$ verschiedene Punkte $\sigma^m Q$, $m = 0, 1, \ldots, p^n - 1$. Da $p^n > 3$ ist, gibt es einen Punkt $\sigma^m Q$, der von P und Q verschieden ist. Da dies nicht sein kann, gehört die Ebene nicht zu IV_a–2, damit also zu IV_a–1.

DIE KLASSE V. Sei $\mathfrak{L}$ ein nichtassoziativer distributiver Quasikörper. Die zugehörige Ebene gehört zur Klasse V ([*12*], S. 108). Beispiele solcher Quasikörper findet man bei DICKSON und ALBERT [*1*].

DIE KLASSE VII–2. Bekanntlich jede Ebene über einem Galoisfeld.

§ 4. (C, c, μ)-Homogenität

§ 4.1. Die Klasseneinteilung. Der Begriff (C, c, μ)-Homogenität ist eine Verallgemeinerung des Baerschen Begriffes der (C, c)-Homogenität (Definition 1.8) und hat auch ähnliche Eigenschaften, so daß einige Sätze über (C, c)-Homogenität sich mit geeigneten Änderungen beweisen lassen. Es ist z.B. falsch, daß in jeder Ebene, die für jedes nicht inzidente Punkt-Geraden-Paar und ein davon abhängendes μ (C, c, μ)-homogen ist, der Satz von PAPPOS gilt (wie im Falle (C, c)-Homogenität), wie Beispiel VII, §4.2 zeigt. Die Einführung der (C, c)-Homogenität wurde dadurch veranlaßt, daß der Baersche Begriff für $C \mathrel{I} c$ keinen Sinn hat und daß man bis jetzt kein Beispiel einer (C, c)-homogenen Ebene kennt, in der nicht der Satz von PAPPOS gilt.

SATZ 4.1.1. *Sei τ eine (C, c, μ)-Korrelation und P ein Punkt mit $P \nmid c$ und $P \neq C$. Dann ist τ durch τP vollständig bestimmt.*

BEWEIS. Seien P und Q zwei verschiedene Punkte nicht auf c und von C verschieden. Ferner sei $P \nmid C\,Q$. Ich definiere $A = PQ \cap c$. Aus Inzidenzen haben wir $Q = AP \cap C\,Q$; daher ist $\tau Q = (\tau A \cap \tau P)\,\tau(C\,Q)$. τP ist gegeben und τA und $\tau(C\,Q)$ sind durch μ bestimmt, daher läßt sich τQ konstruieren. Falls $Q \mathrel{I} C\,P$ ist, bestimmen wir zuerst τR für ein $R \nmid C\,P$ und wenden dann die angegebene Konstruktion mit R statt P an.

Satz 4.1.2. *Die folgenden Aussagen sind gleichwertig:*

i) $\mathfrak{E}$ *ist* (C, c, μ)*-homogen.*

ii) $\mathfrak{E}$ *ist* (C, c)*-transitiv und es gibt eine* (C, c, μ)*-Korrelation* τ.

Beweis. i$\Rightarrow$ii: Nach Definition 1.8 ist eine Menge $\mathfrak{M}$ von (C, c, μ)-Korrelationen mit den dort angegebenen Eigenschaften vorhanden. Ich wähle τ beliebig aus $\mathfrak{M}$. Sei $P \not\mathrel{I} c$ und $P \neq C$ und $Q \mathrel{I} C P$, aber auch $Q \not\mathrel{I} c$ und $Q \neq C$. Da das Produkt zweier (C, c, μ)-Korrelationen eine (C, c)-Kollineation sein muß, habe ich nur noch die Existenz eines $\sigma \in \mathfrak{M}$ mit $\sigma(\tau P) = Q$ nachzuweisen. Das ist aber gerade die Aussage 3. von Definition 1.8, denn τP ist eine nicht durch C gehende, von c verschiedene Gerade mit

$$Q \mathrel{I} C P = \mu\mu^{-1}(C P) = \mu(c \cap \tau P).$$

ii$\Rightarrow$i: Ich behaupte, daß die Menge $\mathfrak{M}$ der $\eta\tau$, wobei η die (C, c)-Kollineationen durchläuft, die Eigenschaften 1., 2. und 3. von Definition 1.8 hat. Es ist klar, daß $\eta\tau$ für alle η eine (C, c, μ)-Korrelation ist. Ich brauche nur noch 2. nachzuweisen, da sich 3. dann durch Dualisieren ergibt. Sei P ein Punkt mit $P \not\mathrel{I} c$ und $P \neq C$, g eine durch $\mu^{-1} C P$ gehende Gerade mit $g \neq c$ und $C \not\mathrel{I} g$. Da $\mathfrak{E}$ (C, c)-transitiv ist und $\mu^{-1}(C P) \mathrel{I} \tau P$ gilt, gibt es eine (C, c)-Kollineation η mit $\eta(\tau P) = g$, und daher erfüllt $\tau_1 = \eta\tau$ die Bedingung 2 von 1.8.

Satz 4.1.3. *Ist die Ebene* $\mathfrak{E}$ (C, c, μ)*- und* (C, c, μ_1)*-homogen, dann ist sie auch* $(C, c, \mu\mu_1^{-1}\mu)$*-homogen.*

Beweis. Seien τ eine (C, c, μ)- und τ_1 eine (C, c, μ_1)-Korrelation, dann ist $\tau^{-1}\tau_1\tau$ eine $(C, c, \mu\mu_1^{-1}\mu)$-Korrelation. Da die Ebene (C, c)-transitiv ist, folgt nach 4.1.2–ii, daß sie $(C, c, \mu\mu_1^{-1}\mu)$-homogen ist. Man kann leicht nachrechnen, daß bei festem C, c mit $C \not\mathrel{I} c$ die von den (C, c)-Dualitäten im Sinne von Baer (d.h. die (C, c, μ)-Korrelationen mit $\mu P = C P$ bei $P \mathrel{I} c$) ein Normalteiler der Gruppe ist, die von den (C, c, μ)-Korrelationen (μ beliebig) erzeugt ist.

Satz 4.1.4. *Ist die Ebene* $\mathfrak{E}$ (C, c, μ)*-homogen und* φ *eine Kollineation oder Korrelation von* $\mathfrak{E}$*, dann ist* $\mathfrak{E}$ $(\varphi C, \varphi c, \varphi\mu\varphi^{-1})$*-homogen bzw.* $(\varphi c, \varphi C, \varphi\mu^{-1}\varphi^{-1})$*-homogen.*

Der Beweis ist klar.

Satz 4.1.5. *Ist* $\mathfrak{E}$ (C, c, μ)*-homogen und* (D, c, ν)*-homogen mit* $C \neq D$*, dann*

i) *ist* $\mathfrak{E}$ *eine Moufang-Ebene, falls* $C D = c$,

ii) *ist* $\mathfrak{E}$ *desarguessch, falls* $C D \neq c$.

Beweis. i) Nach 4.1.2 ist $\mathfrak{E}$ (C, c)- und (D, c)-transitiv, daher $(C D, c)$-transitiv. Sei τ eine (C, c, μ)-Korrelation, dann ist auch $(\tau c, \tau C D)$-transitiv, d.h. (C, C)-transitiv. Daher gehört $\mathfrak{E}$ zur Lenz-Klasse V oder VII. Aber ebenso wie wir die (C, C)-Transitivität nachgewiesen haben, können wir auch die (D, D)-Transitivität zeigen. Daher muß $\mathfrak{E}$ zur Klasse VII gehören, weil $C \neq D$ ist.

ii) Nach Satz 4.1.2 ist $\mathfrak{E}$ (C, c)-transitiv, und (D, c)-transitiv, also (CD, c)-transitiv; wegen $CD \neq c$ gehört $\mathfrak{E}$ also zu einer der Klassen IV_b–2, 3 oder VII–2. Da Ebenen der Klasse IV keine Korrelation besitzen können (LENZ [9]), gehört $\mathfrak{E}$ zur Klasse VII–2, d.h. $\mathfrak{E}$ ist desarguessch.

Mittels Satz A von LENZ und BARLOTTI und Satz 4.1.2 kann man eine Lenz-Barlotti-Klasseneinteilung projektiver Ebenen nach (C, c, μ)-Homogenität herstellen. Aus Satz A wissen wir, für höchstens welche Punkt-Geraden-Paare (C, c) die Ebene (C, c)-transitiv sein kann. Für die Menge $\mathfrak{S}$ aller Punkt-Geraden-Paare, für welche eine Abbildung μ existiert derart, daß die Ebene (C, c, μ)-homogen ist, kommen nach Satz 4.1.2 nur diese Paarmengen in Frage. Die Beweismethode ist folgende: Man nimmt eine *L-B*-Klasse und setzt voraus, daß es eine (C, c, μ)-Korrelation gibt, und zieht daraus Folgerungen. Der Satz lautet[5]):

SATZ 4.1.6. *Die Menge $\mathfrak{S}$ hat eine der folgenden Formen:*

A–α. $\mathfrak{S}$ *ist leer. (Der L-B-Typ* VII–1 *kommt nicht vor.)*

A–β. $\mathfrak{S}$ *besteht aus einem Paar* (C, c) *mit* $C \mathrm{I} c$. *(L-B-Typen* I–1, 6, II–1, III–1, III–2, IV, V, VII *kommen nicht vor.)*

A–γ. $\mathfrak{S}$ *besteht aus zwei Paaren* (C_i, c_i), $(i = 1, 2)$, *wobei* $C_i \mathrm{I} c_j$ *genau dann gilt, wenn* $i \neq j$. *(Es kommen höchstens die L-B-Typen* I_3, I_4 *vor.)*

A–δ. $\mathfrak{S}$ *besteht aus drei Paaren* (C_i, c_i), $(i = 1, 2, 3)$, *wobei* $C_i \mathrm{I} c_j$ *genau dann gilt, wenn* $i \neq j$. *(Nur L-B-Typ* I–4 *kommt vor; s.* §4.2, *Beispiel* VIII.)

A–ε. *Es gibt einen Punkt* R *und eine Gerade* r $(R \mathrm{I} r)$ *und eine umkehrbare Abbildung* π *der Menge der Punkte von* r *auf die Geraden durch* R *mit den Eigenschaften*

i) $\pi(R) = r$;

ii) $(C, \pi(C)) \in \mathfrak{S}$ *falls* $C \neq R$ *und* $C \mathrm{I} r$.

iii) *Aus* $(C, c) \in \mathfrak{S}$ *folgt* $C \mathrm{I} r$, $C \neq R$ *und* $c = \pi(C)$.
(Es kommt höchstens L-B-Typ I–6 *vor.)*

A–ζ. $\mathfrak{S}$ *besteht aus allen nicht-inzidenten Punkt-Geraden-Paaren. (Die Ebene ist desarguessch.)*

B–α. $\mathfrak{S}$ *besteht aus einem Paar* (C, c) *mit* $C \mathrm{I} c$. *(L-B-Typen* I, III, IV, VII *kommen nicht vor.)*

B–β. $\mathfrak{S}$ *besteht aus zwei Paaren* (C_i, c_i), $(i = 1, 2)$ *mit* $C_1 \mathrm{I} c_i$ *und* $C_i \mathrm{I} c_1$ *für* $i = 1, 2$. *(Nur L-B-Typ* II–2 *kommt vor; s.* §4.2, *Beispiel* IV.)

C–α. *Es gibt einen Punkt* R *und eine nicht durch* R *gehende Gerade* r *mit den Eigenschaften:*

[5]) Die Klasseneinteilung gemäß den großen lateinischen Buchstaben ist eine „Lenzsche" Einteilung, d.h. nach inzidenten Paaren. Die Unterteilung gemäß den kleinen griechischen Buchstaben ist eine „Barlottische" Unterteilung, d.h. nach nichtinzidenten Paaren. Nach einer brieflichen Mitteilung von YAQUB wurde Satz 4.1.6 für (C, c)-Homogenität bewiesen, aber da keine Beispiele außer den Pappos-Ebenen bekannt sind, in die spätere Veröffentlichung nicht aufgenommen.

i) *Aus* $C\,\mathrm{I}\,r$ *folgt* $(C, CR) \in \mathfrak{S}$.

ii) *Aus* $(C, c) \in \mathfrak{S}$ *folgt* $C\,\mathrm{I}\,r$ *und* $c = CR$.
(Es kommen höchstens die L-B-Typen III *vor.)*

C–β. *Wie* C–α, *aber auch* $(R, r) \in \mathfrak{S}$. *(Nur L-B-Typ* III–2 *kommt vor; s. Beispiel* V, §4.2.)

D–α. $\mathfrak{S}$ *besteht aus allen Paaren* (C, c) *mit* $C\,\mathrm{I}\,c$. *(Nur L-B-Typ* VII–1 *kommt vor; s.* §4.2, *Beispiel* VI.)

D–β. $\mathfrak{S}$ *besteht aus allen Paaren* (C, c). *(Nur L-B-Typ* VII–2 *kommt vor; s.* §4.2, *Beispiel* VII.)

Beweis. Daß der Typ IV keine Korrelation besitzen kann, hat schon Lenz [9] gezeigt, daher kann eine Ebene der Klasse IV nur zur Klasse A–α gehören. Außerdem ist es trivial, daß eine Ebene der Klasse I–1 nur zur Klasse A–α gehören kann. Bei den anderen *L-B*-Typen (außer VII–1, 2) gibt es höchstens drei ausgezeichnete Punkt-Geraden-Paare (nicht notwendig in $\mathfrak{S}$), deren Gesamtheit durch jede Kollineation und jede Korrelation der Ebene in sich übergeführt werden muß. Da sich diese von VII verschiedenen Typen ganz ähnlich behandeln lassen, beschränke ich mich darauf, den Beweis etwa für den Typ III–2 zu führen.

Entweder gehört die Ebene zur Klasse A–α und wir sind fertig, oder es existiert eine (C, c, μ)-Korrelation τ. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder ist $C = R$, $c = r$ oder $C\,\mathrm{I}\,r$, $c = CR$. Im ersten Fall ist die Ebene (R, r, μ)-homogen, da sie (R, r)-transitiv ist. Gehört die Ebene nicht zur Klasse A–β, so besitzt sie eine (C, CR, ν)-Korrelation für ein $C\,\mathrm{I}\,r$ und ist daher (C, CR, ν)-homogen, da sie schon (C, CR)-transitiv ist. Die Kollineationsgruppe ist auf den Punkten von r transitiv; daraus folgt die (C, CR, ν_C)-Homogenität für alle $C\,\mathrm{I}\,R$ — die Ebene gehört zur Klasse C–β.

Wenn wir den zweiten Fall betrachten, bekommen wir die (C, CR, ν_C)-Homogenität für alle $C\,\mathrm{I}\,r$. Wenn keine weiteren (C, c, μ)-Korrelationen vorhanden sind, haben wir eine Ebene der Klasse C–α.

Ebenen der Klasse VII müssen anders behandelt werden, da es keine ausgezeichneten Paare gibt. Ich nehme an, daß die Ebene (C, c, μ)-homogen für ein inzidentes Punkt-Geraden-Paar (C, c) ist, so daß also zu $\mathfrak{S}$ alle inzidenten Punkt-Geraden-Paare gehören. Falls die Ebene zur Klasse VII–1 gehört, sind wir fertig und sie gehört auch zur Klasse D–α. Andernfalls ist die Ebene desarguessch, und daher ist die Multiplikation in jedem Koordinatensystem assoziativ. Offenbar gibt es ein Koordinatenviereck O, U, V, E mit $V = C$, $U\,\mathrm{I}\,c$ (also $\omega = c$), $O\,\mathrm{I}\,\mu\,U$ und $E = OW \cap \mu W$ (dabei $W = OE \cap \omega$). Eine (C, c, μ)-Korrelation τ kann man dann folgendermaßen darstellen:

$$\tau(x, y) = [x^\beta, y^\gamma], \qquad \tau[m, b] = (m^\alpha, b^\gamma),$$

$$\tau(m) = [m^\alpha], \qquad \tau[x] = (x^\beta),$$

$$\tau V = \omega, \qquad \tau\omega = V,$$

wobei α, β, γ Abbildungen von $\mathfrak{T}$ auf sich sind, die durch τ eindeutig bestimmt werden.

BEWEIS. Wegen $\tau\omega = V$ und $\tau V = \omega$ gibt es Abbildungen α, β von $\mathfrak{T}$ auf sich mit $\tau(m) = [m^\alpha]$, $\tau[x] = (x^\beta)$. Wegen $\tau U = OV$ ist $\tau[0, b] = (0, b^\gamma)$, und aus $(0, b) \mathrm{I} [0, b]$, $\tau OV = U$ folgt $\tau(0, b) = [0, b^\gamma]$. Die Gerade $[m, b]$ ist die Verbindungsgerade von (m) und $(0, b)$; also gilt $\tau[m, b] = \tau(m) \cap \tau(0, b) = [m^\alpha] \cap [0, b^\gamma] = (m^\alpha, b^\gamma)$. Der Punkt (x, y) ist Schnittpunkt der Geraden $[x]$ und $[0, y]$, daher $\tau(x, y) = \tau[x] \cup \tau[0, y] = (x^\beta) \cup (0, y^\gamma) = [x^\beta, y^\gamma]$. Aus $(x, y) \mathrm{I} [m, b]$ folgt $\tau[m, b] \mathrm{I} \tau(x, y)$. Daher hat man die Gleichung:

(1) $$b^\gamma = x^\beta m^\alpha + (mx + b)^\gamma \quad \text{für alle } m, x, b \in \mathfrak{T}.$$

Für $b = 0$ ergibt sich $0^\gamma = x^\beta m^\alpha + (mx)^\gamma$. Setzt man in dieser Gleichung einmal $x = uv$, $m = u$, zum anderen $m = uv$, $x = w$, so folgt

$$0^\gamma = (vw)^\beta u^\alpha + (uvw)^\gamma = w^\beta (uv)^\alpha + (uvw)^\gamma,$$

also $(vw)^\beta u^\alpha = w^\beta (uv)^\alpha$ für alle $u, v, w \in \mathfrak{T}$.

Wegen $\tau(1) = [1]$, $\tau[1] = (1)$ ist $1^\alpha = 1 = 1^\beta$.

Mit $u = v = 1$ folgt daher $v^\beta = v^\alpha$ für alle v. Daher ist α ein Antiautomorphismus der multiplikativen Gruppe. Mit $m = 1$ wird (1) zu

(2) $$b^\gamma = x^\alpha + (x + b)^\gamma.$$

Für $b = 0$ ergibt das:

(3) $0^\gamma = x^\alpha + x^\gamma$, so daß (2) zu

(4) $x^\gamma + b^\gamma = (x + b)^\gamma + 0^\gamma$ wird.

Mit $x + y$ statt x schreibt sich (2) als:

$$b^\gamma = (x + y)^\alpha - (x + y + b)^\gamma.$$

Nach (4) ist $(x + y + b)^\gamma = x^\gamma + y^\gamma + b^\gamma - 2 \cdot 0^\gamma$ und daher

$$0 = (x + y)^\gamma + x^\gamma + y^\gamma - 2 \cdot 0^\gamma.$$

Da sich aus (3) $x^\alpha + x^\gamma + y^\alpha + y^\gamma = 2 \cdot 0^\gamma$ ergibt, erhält man schließlich $x^\alpha + y^\alpha = (x + y)^\alpha$. Daher ist α Antiautomorphismus des Schiefkörpers. τ^2 ist nun nach Definition eine (C, c)-Kollineation, d.h. eine Translation in Richtung der zweiten Koordinatenachse, also $\tau^2(x, y) = (x, y + a)$ für geeignetes $a \in \mathfrak{T}$. Da aber $\tau^2(x, y) = (x^{\alpha^2}, y^{\gamma^2})$ gilt, folgt $\alpha^2 = 1$. Wie in Satz 4.2.1 gezeigt wird, existiert daher eine Abbildung μ, so daß die Ebene (U, OV, μ)-homogen ist. Also gehören alle Paare (C, c) zu $\mathfrak{S}$, und die Ebene gehört zur Klasse D–β.

Wenn die Ebene (C, c, μ)-homogen für ein nichtinzidentes Paar (C, c) ist, dann gehören alle nichtinzidenten Paare zu $\mathfrak{S}$, also gehört die Ebene entweder zur Klasse A–ζ oder D–β. Es ist unbekannt, ob A–ζ nicht leer ist.

§ 4.2. Beispiele von Ebenen mit (C, c, μ)-Homogenität. SATZ 4.2.1. *Sei der Ternärkörper $\mathfrak{T}$ linear, seine Addition erfülle die Links- und Rechtsinvers-*

bedingungen (d.h. es gelten mit der Abkürzung $-a=0-a$ *die Gleichungen* $(-a)+(a+b)=b=(b+a)+(-a)$ *für alle* $a, b\in\mathfrak{T}$*) und es sei* α *ein Antiautomorphismus von* $\mathfrak{T}$*, d.h. eine umkehrbare Abbildung von* α *auf sich mit* $(a+b)^\alpha=b^\alpha+a^\alpha$*,* $(ab)^\alpha=b^\alpha a^\alpha$ *für alle* $a, b\in\mathfrak{T}$*. Dann gilt für die zu* $\mathfrak{T}$ *gehörige Ebene* $\mathfrak{E}$*:*

i) *Durch*

$$\sigma(x, y)=[x^\alpha, -y^\alpha], \qquad \sigma[m, b]=(m^\alpha, -b^\alpha),$$
$$\sigma(m)=[m^\alpha], \qquad \sigma[x]=(x^\alpha),$$
$$\sigma V=UV, \qquad \sigma UV=V.$$

wird eine Korrelation von $\mathfrak{E}$ *definiert.*

Wird weiter $\alpha^2=1$ *vorausgesetzt und sind* μ, μ' *die von* σ *hervorgerufenen Abbildungen der Punktreihe auf* UV *bzw. der Punktreihe auf* OV*, so hat man:*

ii) *Aus der* (V, UV)*-Transitivität folgt die* (V, UV, μ)*-Homogenität.*

iii) *Aus der* (U, OV)*-Transitivität folgt die* (U, OV, μ')*-Homogenität.*

Beweis. In (i) ist nur noch aus $(x, y)\,\mathrm{I}\,[m, b]$ die Inzidenz $\sigma[m, b]\,\mathrm{I}\,\sigma(x, y)$ herzuleiten:

$$y=mx+b, \qquad y^\alpha-b^\alpha+x^\alpha m^\alpha,$$
$$-b^\alpha+y^\alpha=x^\alpha m^\alpha, \qquad -b^\alpha=x^\alpha m^\alpha+(-y^\alpha).$$

In (ii) und (iii) bemerkt man, daß aus $\alpha^2=1$ auch $\sigma^2=1$ folgt, und da $\sigma UV=V$ und $\sigma V=UV$ gelten, ergibt sich, daß σ sowohl (V, UV, μ)- als auch (U, OV, μ')-Korrelation ist. Die Behauptung folgt sofort nach Satz 4.1.2.

Beispiel I. Die Klasse A–α:

Die endlichen Ebenen von §3 sind Beispiele der Klassen A–α, I–1, IV_a–1, 2 und 3 bzw. IV_b–1, 2, 3. Nach Kneser [7] gibt es Ebenen über Schiefkörpern, die keine Korrelationen besitzen. Solche Ebenen gehören zur Klasse A–α, VII–2.

Beispiel II. Die Klasse B–α, II–1:

$\mathfrak{T}$ sei die Menge der reellen Zahlen, und die Ternärverknüpfung $\boldsymbol{T}$ sei definiert durch:

$$\boldsymbol{T}(s, x, t)=sx+p\cdot\operatorname{sign}(sx)\cdot(|s|-1)(|x|-1)+t$$

wobei $p<0$. Nach Salzmann[1]) ist die Ebene (V, UV)-transitiv und gehört zur Klasse II–1. Es ist leicht zu sehen, daß die Multiplikation kommutativ ist, so daß die Identität ein Antiautomorphismus mit $\alpha^2=1$ ist. Nach Satz 4.2.1–ii gehört dann die Ebene zur Klasse B–α, II–1.

Beispiel III. Die Klasse B–α, V:

Sei $\mathfrak{Q}$ ein distributiver, kommutativer, nichtassoziativer Quasikörper (Albert [1]), so daß man in Satz 4.2.1 $\alpha=1$ setzen kann[6]). Da $\mathfrak{Q}$ distributiv

[6]) Siehe auch Wagner [18].

ist, gehört die Ebene zur L-B-Klasse V, und da sie (V, UV, μ)-homogen ist, gehört sie zur Klasse B–α.

BEISPIEL IV. Die Klasse B–β, II–2:

$\mathfrak{T}$ sei wieder die Menge der reellen Zahlen und die Ternärverknüpfung $\boldsymbol{T}$ definiert durch:

$$\boldsymbol{T}(m, x, b) = (m^{\varphi} x^{\varphi})^{\varphi^{-1}} + b,$$

wobei φ definiert ist durch:

$$\begin{aligned} x^{\varphi} &= x \quad \text{für} \quad |x| > 1 \\ &= (x + \operatorname{sign} x)/2 \quad \text{für} \quad |x| \leqq 1; \end{aligned}$$

Das ist SALZMANNS Beispiel[1]) für eine Ebene der Klasse II–2, die (V, UV)- und (U, OV)-transitiv ist. Weil die Addition mit der gewöhnlichen Addition der reellen Zahlen übereinstimmt und die Multiplikation kommutativ ist, können wir in Satz 4.2.1 $\alpha = 1$ wählen, um das Ergebnis zu bekommen.

BEISPIEL V. Die Klasse C–β, III–2:

$\mathfrak{T}$ sei wieder die Menge der reellen Zahlen und die Ternärverknüpfung $\boldsymbol{T}$ definiert durch:

$$\boldsymbol{T}(m, x, b) = \begin{cases} m x + b, & \text{falls } m > 0 \text{ oder } x > 0, \\ m k x + b, & \text{falls } m \leqq 0 \text{ und } x \leqq 0, \end{cases}$$

wobei $k > 0$ und $k \neq 1$. YAQUB [19] hat gezeigt, daß diese Ebene zur L-B-Klasse III–2 gehört und (U, OV)-transitiv sowie (C, UC)-transitiv für alle $C \mathrm{I} OV$ ist. Da die Addition die der reellen Zahlen und die Multiplikation kommutativ ist, kann ich Satz 4.2.1 mit $\alpha = 1$ anwenden: die Ebene ist (U, OV, μ)-homogen und (V, UV, μ')-homogen. Da die Kollineationsgruppe auf den Punkten von OV transitiv ist, folgt nach Satz 4.1.4, daß die Ebene auch (C, UC, v_c)-homogen ist für alle $C \mathrm{I} OV$, und mit geeigneter, von C abhängender Abbildung v_C.

BEISPIEL VI. Die Klasse D–α, VII–1.

Sei $\mathfrak{A}$ ein Alternativkörper, der kein Schiefkörper ist. Bekanntlich besitzt $\mathfrak{A}$ einen involutorischen Antiautomorphismus. Da die zu $\mathfrak{A}$ gehörige Ebene (C, c)-transitiv für jedes inzidente Punkt-Geraden-Paar (C, c) ist und die Punkte U, V beliebig gewählt werden dürfen, folgt dann nach Satz 4.2.1–ii, daß es für jedes inzidente Punkt-Geraden-Paar (C, c) ein μ gibt, derart, daß die Ebene (C, c, μ)-homogen ist.

BEISPIEL VII. Die Klasse D–β, VII–2.

Besitzt ein Schiefkörper einen Antiautomorphismus der Ordnung 2, so gehört die zu ihm gehörende Ebene nach Satz 4.2.1 zur Klasse D–β, VII–2; Beispiel: der Quaternionenschiefkörper über dem Körper der reellen Zahlen.

BEISPIEL VIII. Die Klasse A–δ, I–4.

SALZMANN [15] hat bewiesen, daß auf die folgende Weise aus der Menge der reellen Zahlen ein planarer Neokörper mit kommutativer Addition und

Multiplikation sowie mit Inversbedingung für die Addition entsteht. Die Addition $\oplus$ wird durch

$$x \oplus t = \begin{cases} x + t/2 & \text{für } t^{-1}x \leqq -3/2 \text{ oder } t^{-1}x \geqq 1 \\ x/2 + t & \text{für } -2/3 \leqq t^{-1}x \leqq 1 \\ 2x + 2t & \text{für } -3/2 \leqq t^{-1}x \leqq -2/3 \end{cases}$$

definiert, und die Multiplikation ist die gewöhnliche Multiplikation der reellen Zahlen. Mit $\alpha = 1$ kann ich 4.2.1–iii anwenden und erhalte eine (U, OV, μ)-homogene, nicht desarguessche Ebene. Man rechnet leicht nach, daß durch die folgenden Festsetzungen zwei Kollineationen ξ, η definiert werden:

$$\xi(x, y) = (y, x), \qquad \xi[m, b] = [m^{-1}, -m^{-1}b], \quad (\text{für } m \neq 0),$$

$$\xi(m) = (m^{-1}), \quad (\text{für } m \neq 0), \qquad \xi[x] = [0, x],$$

$$\xi V = U, \qquad \xi UV = UV,$$

$$\xi U = V, \qquad \xi[0, b] = [b].$$

$$\eta(x, y) = (x^{-1}, yx^{-1}) \quad (\text{für } x \neq 0), \qquad \eta[m, b] = [b, m],$$

$$\eta(m) = (0, m), \qquad \eta[x] = [x^{-1}], \quad (\text{für } x \neq 0),$$

$$\eta V = V, \qquad \eta UV = [0],$$

$$\eta(0, y) = (y), \qquad \eta[0] = UV.$$

Die Ebene ist daher $(\xi U, \xi OV, \xi\mu\xi^{-1})$-homogen, d.h. $(V, OU, \xi\mu\xi^{-1})$-homogen und $(\eta U, \eta OV, \eta\mu\eta^{-1})$-homogen, also $(O, UV, \eta\mu\eta^{-1})$-homogen. Daher gehört die Ebene zur Klasse A–δ, I–4.

Literatur

[1] Albert, A. A.: Generalised Twisted Fields. Pacific J. Math. **11**, 1–8 (1961).

[2] André, J.: Über nicht desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **60**, 156–186 (1954).

[3] Baer, R.: Homogeniety of Projective Planes. Amer. A. Math. **64**, 137–152 (1942).

[4] Barlotti, A.: Le possibili configurazioni del sistema delle coppie punto-retta (A, a) per cui un plano grafico risulta (A, a)-transitivo. Boll. U.M.I. (3) **12**, 212–226 (1957).

[5] Bartolozzi, F.: Il gruppo projettivo di un plano sopra un Quasicorpo distributivo finito. Atti della Accad. Palermo (IV) **19**, 115–125 (1958/59).

[6] Bruck, R. H.: A Survey of Binary Systems. Berlin: 1958.

[7] Hughes, D. R.: A class of Non-Desarguesian Projective Planes. Can. J. Math. **9**, 378–388 (1957).

[8] Kneser, H.: Schiefkörper und Dualitätsprinzip (Vortragsauszug). Jber. dtsch. Math.-Ver. **45**, 77–78 (1935).

[9] Lenz, H.: Kleiner Desarguesscher Satz und Dualität in projektiven Ebenen. Jber. dtsch. Math.-Ver. **57**, 20–31 (1954).

[10] Ostrom, T. G.: Transitivities in Projective Planes. Can. J. Math. **9**, 389–399 (1957).

[11] — Corrections to Transitivities in Projective Planes. Can. J. Math. **10**, 507—512 (1958).
[12] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin: 1955.
[13] — Eine Kennzeichnung desarguesscher Ebenen. Math. Z. **71**, 99—108 (1959).
[14] — Gemeinsame Kennzeichnung zweier projektiver Ebenen. Abh. Math. Sem. Hamburg **23**, 69—74 (1959).
[15] SALZMANN, H.: Topologische projektive Ebenen. Math. Z. **67**, 436—466 (1957).
[16] SANS SOUCIE, R. L.: Right Alternative Division Rings of Characteristic Two. Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 291—296 (1955).
[17] SPENCER, J. C. D.: On the Lenz-Barlotti-Classification of Projective Planes. Quarterly J. Math. Oxford (2) **11** No. 44, 241—257 (1960).
[18] WAGNER, A.: On Perspectivities of Finite Projective Planes. Math. Z. **71**, 113—123 (1959).
[19] YAQUB, J. C. D. S.: On Projective Planes of Class III. Archiv d. Math. **12**, 146—150 (1961).

Math. Dept., University of Manitoba, Winnipeg (Canada)

(Eingegangen am 6. Juni 1962)

Lebenslauf

Ich, WILBUR JACOB JÓNSSON, bin am 18. 9. 1936 in Winnipeg, Manitoba Kanada, geboren. Meine Schulausbildung erhielt ich in dieser Stadt in der Machray School (erstes bis neuntes Schuljahr) und in der St. John's Technical High School (zehntes bis zwölftes Schuljahr). An der letzteren machte ich mein Abitur im Juni 1954.

Im September 1954 begann ich mein Studium an der University of Manitoba bei der Naturwissenschaftlichen Fakultät. Den „Honours"-Kursus in Mathematik und Physik trat ich im nächsten Jahr an. Im Mai 1958 erreichte ich den Grad „Bachelor of Science (Honours)" und im Mai 1959 den Grad „Master of Science". Die Zulassungsarbeit für den Magistergrad machte ich bei Herrn Prof. Dr. NATHAN S. MENDELSOHN.

Während des Universitätsjahres 1958/59 war ich lehrbeauftragter Assistent beim Mathematischen Institut an der University of Manitoba und im folgenden Jahr Lektor für Mathematik.

Im Jahr 1955 und wieder 1956 erhielt ich das sog. „Winnipeg Tribune Bursary"-Stipendium. Im Wintersemester 1961/62 bekam ich ein Stipendium des Deutschen Akademischen Austauschdienstes.

1958 war ich Mitglied der Mannschaft, die für die University of Manitoba den vierten Preis bei der William Lowell Putnam Mathematical Competition gewann.

Im Wintersemester 1960/61 begann ich mein Studium an der Universität Tübingen. Die vorliegende Doktorarbeit fertigte ich an im Mathematischen Institut der Universität Tübingen unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. G. PICKERT.

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. G. PICKERT, möchte ich an dieser Stelle für seine zahlreichen Ratschläge und Unterstützungen, die er mir bei der Ausführung dieser Arbeit gegeben hat, meinen herzlichen Dank aussprechen.